ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2004, том 394, № 5, с. 598–601

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

БИЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

© 2004 г. А. М. Молчанов

Представлено академиком Т.М. Энеевым 21.07.2003 г.

Поступило 21.08.2003 г.

ВВЕДЕНИЕ

В сообщении предложен новый класс динамических систем, состоящих из многих сильно взаимодействующих компонент. Они допускают точное сведение (типа самосогласованного поля) к более простым системам, размерность которых не зависит от числа компонент. Отсутствие предположения о малости взаимодействия существенно отличает предполагаемый подход от известных и позволяет поставить вопрос о моделировании сложных типов кинетики.

Рассмотрим динамическую систему большего числа N одинаковых компонент

$$\frac{dx_i}{dt} = a(x_i) + \sum_{k=1}^{N} b(x_i, x_k). \tag{1}$$

Механизм парного взаимодействия в случае билинейных систем задается векторной функцией $b(x, y)$ двух векторных аргументов x и y. Эта функция одна и та же для любой пары компонент x_i, x_k.

Числа N характеризуют меру атомарности (блочности) изучаемой сложной системы. Типичные значения N огромны: число звезд в галактике 10^{11}, число молекул в 1 см^3 газа 10^{16}. Широк диапазон N (от сотен до миллионов компонент) и в биологических системах. Общим у всех этих систем является невозможность чисто вычислительного подхода не только на современных ЭВМ, но и на ожидаемых в предвидимом будущем.

Основная идея предлагаемого подхода хорошо видна на примере билинейных систем. Пример этот к тому же имеет самостоятельную ценность.

Система (1) называется билинейной, если функции $a(x)$ и $b(x, y)$ линейны по своим аргументам.

На первом шаге используем линейность только функции $b(x, y)$ и только по второму (чужому) аргументу. Вводя новую (коллективную) переменную

$$X = \sum_{k=1}^{N} x_k, \tag{2}$$

получаем уравнение для x_i

$$\frac{dx_i}{dt} = a(x_i) + b(x_i, X). \tag{3}$$

Уже это уравнение дает существенное продвижение. Из него видно, что x_i реагирует только на X целиком, а вовсе не на каждую компоненту x_k в отдельности, как это казалось при первом взгляде на уравнения системы (1).

Следующий шаг оказывается решающим. Используя линейность $a(x)$ и $b(x, y)$ по своему аргументу x и складывая все уравнения (3), получаем уравнение только для X, не содержащее других переменных,

$$\frac{dx}{dt} = a(X) + B(X, X). \tag{4}$$

Оказывается, что для билинейных систем коллективное переменное X удовлетворяет как раз эталонному уравнению.

Итак, мы получили систему

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= a(X) + B(X, X), \\ \frac{dx}{dt} &= a(x) + b(x, X). \end{aligned} \tag{5}$$

Введение коллективного переменного X радикально упрощает ситуацию.

Существенны два обстоятельства. Во-первых, уравнение для X не зависит от x_i. Во-вторых, каждая из компонент x_i зависит только от "диспетчера" X, а не взаимодействуют каждая с каждой, как это было в исходной системе

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= a(X) + B(X, X), \\ \frac{dx}{dt} &= a(x) + b(x, X). \end{aligned} \tag{6}$$

Размерность этой системы не зависит от N. Этот переход основан на том важном соображении,

Институт математических проблем биологии Российской Академии наук, Пущино Московской обл.

что уравнения для компонент x_i в системе (5) одинаковы. Поэтому движение отображающей точки в пространстве $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ огромной размерности равносильно движению россыпи точек $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в пространстве всего лишь одной компоненты. Предельный переход $N \to \infty$ допускает поэтому замечательную интерпретацию – это переход к рассмотрению фазового портрета системы (6) в пространстве (x, X). Такая задача (построение фазового портрета в пространстве x небольшой размерности) вполне по силам[1] современной прикладной математике, сочетающей развитые вычислительные алгоритмы с аналитическими методами качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

МАКРОДИНАМИКА

Первое уравнение

$$\frac{dX}{dt} = a(X) + b(X, X) \tag{7}$$

редуцированной системы естественно назвать уравнением макродинамики, ибо оно описывает поведение системы в целом. Слово "макродинамика" сознательно выбрано похожим на слово "термодинамика". Но сразу же следует отметить и различия. Во-первых, термодинамика обычно связана с асимптотикой специального класса гамильтоновых систем и в этом смысле значительно тоньше и труднее. Во-вторых, вопреки названию термодинамика изучает не динамику, а стационарные состояния этих систем. В-третьих, обычный подход термодинамики аксиоматический и существует очень немного доказанных теорем о свойствах предельного перехода $N \to \infty$. Тем не менее главное сходство состоит именно в постановке вопроса об асимптотическом поведении систем большой размерности. С этой точки зрения билинейные системы весьма полезны, ибо на них можно проверять любые асимптотические предположения.

Существует значительно более широкий класс систем, для которых предельный переход $N \to \infty$ также сводится к рассмотрению фазового портрета, но их построение, а тем более анализ выходит за рамки данной статьи.

Возвращаясь к уравнению макродинамики (7), заметим, что оно содержит как частные случаи разные системы, изученные ранее независимо: уравнение Ферхюльста–Перла

$$\frac{dX}{dt} = aX + bX^2; \tag{8}$$

система Вольтерра

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= a_1X + b_1XY, \\ \frac{dY}{dt} &= a_2Y + b_2XY; \end{aligned} \tag{9}$$

система Лоренца

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= -\sigma X + \sigma Y, \\ \frac{dY}{dt} &= \rho X - Y - XZ, \\ \frac{dZ}{dt} &= -\theta Z + XY; \end{aligned} \tag{10}$$

система Лотка

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= X(\lambda + a_1X + a_2Y + a_3Z), \\ \frac{dY}{dt} &= Y(\mu + b_1X + b_2Y + b_3Z), \\ \frac{dZ}{dt} &= Z(\nu + c_1X + c_2Y + c_3Z), \end{aligned} \tag{11}$$

а также другие, менее известные системы, из которых следует особенно отметить системы гидродинамического типа [1, 2], динамо Рикитаке [3].

Несколько замечаний об этих уравнениях. Уравнение Ферхюльста возникло в середине XIX в. Это уточнение подхода Мальтуса к популяционной проблеме. Сходна судьба системы Вольтерра, возникшей также из популяционной задачи (хищник–жертва), нашедшей затем точную (а не приближенную, как в исходной проблеме) интерпретацию в химической кинетике (холодные пламена). Система Лоренца обязана своим происхождением гидродинамической проблеме турбулентности.

Весьма любопытна судьба систем (11) типа Лотка. Сначала она возникла при анализе кинетики простой химической системы и число уравнений было два. Позже выяснилось, что такие системы, но третьего порядка возникают в популяционных задачах типа "два хищника–жертва" или "две жертвы–хищник". Но отсутствие тогда вычислительной техники и невозможность аналитического подхода надолго затормозили исследование этой системы. Затем выяснилось, что системы такого вида возникают при анализе устойчивости движения (три пары чисто мнимых корней) даже в чисто механических системах. Развитый аппарат теории устойчивости позволил выяснить некоторые общие свойства таких систем. Позже такие системы вновь возникли в связи с идеями Эйгена [4] о химической эволюции (гиперциклы), и их снова изучали заново как самостоятельный объект. И наконец, совсем недавно с экологических позиций (вмешательство человека в систему

[1] "Человеку – человеково, ЭВМ – эвээмово". Математик совершает предельный переход, после чего ЭВМ "перемалывает цифирь". Это и есть правильное разделение труда между наукой и техникой.

"хищник–жертва") в НИВЦ АН СССР Ю.М. Апониным с соавторами было исследовано численно сложное поведение такой системы, а именно цепочка удвоений предельного цикла, приводящая к возникновению перемешивания в системе. Сейчас стационарные режимы, возникающие при перемешивании, обычно называют странным аттрактором.

Основной результат предложенной работы состоит в истолковании любой из перечисленных систем как эталонного уравнения некоторой многокомпонентной системы. Ясно, что такой подход существенно расширяет поле применимости всех таких систем. Не менее существенно другое обстоятельство. Перечисленные системы перестают быть при таком подходе случайным набором исторических курьезов. Они становятся частным случаем единого общего подхода – это эталонные уравнения макродинамики многокомпонентных билинейных систем.

Одномерное эталонное уравнение

$$\frac{dX}{dt} = aX + bX^2 \tag{12}$$

всегда есть уравнение Ферхюльста–Перла и заменой переменных

$$X = -\frac{a}{b}\xi, \quad t = \frac{1}{a}\tau \tag{13}$$

оно сводится к стандартной форме

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \xi - \xi^2, \tag{14}$$

имеющей три стационарные точки: бесконечно удаленную, $\xi = 0$ и $\xi = 1$. Обычное истолкование этого уравнения – переходный процесс из окрестности неустойчивого стационара в окрестность устойчивого $\xi = 1$.

Логически возможен и процесс ухода $\xi \to -\infty$, но он воспринимается как взрыв и разрушение системы. Поэтому одномерные системы укрепляли представление о единственности макродинамического равновесия, перекликающееся с идеей термодинамического равновесия.

Однако положение дел существенно меняется при переходе к двумерному случаю, когда эталонное управление оказывается зависящим от десяти параметров:

$$\begin{aligned}\frac{dX_1}{dt} &= a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_{111}X_1^2 + b_{112}X_1X_2 + b_{122}X_2^2,\\ \frac{dX_2}{dt} &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + b_{211}X_1^2 + b_{212}X_1X_2 + b_{222}X_2^2.\end{aligned} \tag{15}$$

Многообразие типов кинетики для такой системы существенно больше, но еще допускает достаточно полное перечисление. Подробный анализ не входит в задачу настоящего сообщения. Наличие точного эталонного уравнения, описывающего поведение полной системы, позволяет сформулировать гипотезу: существует связь между фазовыми переходами и бифуркационными явлениями в уравнении макродинамики.

Обычное представление о фазовых переходах относится к изменению стационарного состояния (положение термодинамического равновесия) в зависимости от изменения внешних параметров системы (чаще всего в зависимости от объема).

Однако точное описание поведения системы в целом (уравнением макродинамики) позволяет расширить понятие фазового перехода на переходы из одного стационарного режима (например, устойчивого равновесия) в другой стационарный режим (например, устойчивого равновесия) в другой стационарный режим (например, предельный цикл). Более того, пример системы Лоренца (или приведенный выше пример стохастического режима в системе Лотка) показывает, что в число стационарных режимов необходимо включать и квазистохастические режимы (лучше, вероятно, говорить о режимах перемешивания). Соответственно обобщается, конечно, и понятие фазового перехода. Понятно, что все сказанное относится к свойствам билинейных систем и перенос этих соображений на гамильтоновы системы требует дополнительных усилий.

АСИМПТОТИКА (ОКРЕСТНОСТЬ БЕСКОНЕЧНОСТИ) ЭТАЛОННОГО УРАВНЕНИЯ

Эталонное уравнение возникает для переменного X, которое есть сумма всех компонент и (вообще говоря) растет вместе с N,

$$X = \sum_{k=1}^{N} x_k = N_y. \tag{16}$$

Поэтому после подстановки этого соотношения в (7) и изменения масштаба времени

$$t = \frac{1}{N}\tau \tag{17}$$

получается уравнение

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{N}a(y) + b(y, y), \tag{18}$$

которое при $N \to \infty$ превращается в однородное

$$\frac{dy}{d\tau} = b(y, y). \tag{19}$$

Применяя эти выкладки к частному случаю (16), имеем двумерную систему

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\tau} &= b_{111}y_1^2 + b_{112}y_1y_2 + b_{122}y_2^2, \\ \frac{dy_2}{d\tau} &= b_{211}y_1^2 + b_{212}y_1y_2 + b_{222}y_2^2. \end{aligned} \tag{20}$$

Разделив одно уравнение на другое, получим однородное уравнение, которое в более привычных обозначениях имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax^2 + bxy + cy^2}{\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2}. \tag{21}$$

Это уравнение интегрируется разными способами (например, в полярной системе координат).

Качественная картина определяется числом и характером инвариантных лучей

$$y = kx, \tag{22}$$

которые находятся из кубичного уравнения, вытекающего из (21):

$$k = \frac{a + bk + ck^2}{\alpha + \beta k + \gamma k^2}. \tag{23}$$

Случай комплексных корней получается слиянием двух лучей. Из четырех возможностей остаются две. Более полный анализ должен учитывать линейные члены. Эти члены исчезают только в пределе при $X \to \infty$. Этот предельный переход является общим случаем. Однако нужно рассмотреть и другой предельный переход:

$$X \to X_0 \quad \text{при} \quad N \to \infty. \tag{24}$$

Этот случай соответствует такому подбору начальных данных x_i, когда их число неограниченно увеличивается, а сумма остается ограниченной. Грубо говоря, это одно условие на большее число компонент. Возникающее при таком предположении богатство кинетических мощностей значительно больше разобранного, а полный анализ, невозможный без вычислительной техники, выходит за рамки настоящего сообщения.

Можно наконец сделать еще одно предположение:

$$X \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty. \tag{25}$$

В этом случае остаются только линейные члены. Поэтому структурный портрет системы сводится к трем известным возможностям: узел, фокус или седло.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Система имеет три масштаба начальных данных. Один соответствует малой окрестности стационарной точки, и поведение системы описывается линейными членами эталонного уравнения

$$\frac{dX}{dt} = a(X). \tag{26}$$

Второй масштаб – “конечные” X. Эволюция таких состояний описывается полным автономным уравнением

$$\frac{dX}{dt} = a(X) + b(X, X). \tag{27}$$

Если отсутствуют устойчивые стационарные режимы, то система автоматически выходит на следующий масштаб (большие X). Эволюция описывается старшими членами эталонного уравнения

$$\frac{dX}{dt} = b(X, X). \tag{28}$$

Все сказанное относится к случаю фиксированных значений параметров эволюционного уравнения. Аналог теории фазовых переходов, состоящий в анализе изменения структурного портрета в зависимости от изменения параметров системы, находится за пределами настоящей работы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01–01–00893).

Автор будет благодарен всем, кто пришлет замечания по адресу am@impb.psn.ru.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Обухов А.М.* // ДАН. 1969. Т. 184. № 2. С. 309–312.
2. *Должанский Ф.В., Кляцкин В.И., Обухов А.М., Чусов М.А.* Нелинейные системы гидродинамического типа. М.: Наука, 1974.
3. *Акук А.Е., Роберс П.Х.* В кн.: Странные аттракторы. М.: Мир, 1981.
4. *Эйген М.* Самоорганизация материи и эволюция биологических макромолекул. М.: Мир, 1973.